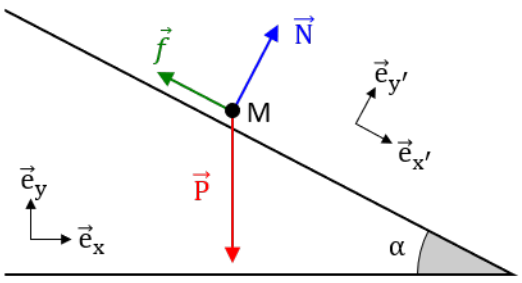
Mécanique classique | Chapitre 1 | TD (M1)

Exercice n°1 • Projection de vecteurs *cours*



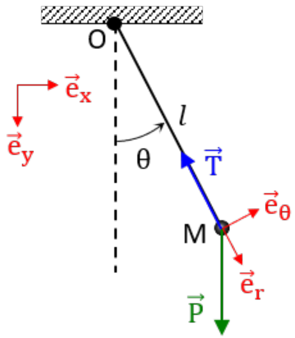


Schéma de gauche : Un point matériel M dévale une pente faisant un angle α avec l'horizontale. Il est soumis à trois forces : le poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{e_y}$, la réaction normale du support $\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{e_{y'}}$ et les frottements $\overrightarrow{f} = -f\,\overrightarrow{e_{x'}}$

1) Donner les composantes de $\overrightarrow{P}$ dans la base $\mathcal{B}'$, et les composantes de $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) Exprimer $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ en fonction de $\overrightarrow{e_{x'}}$ et $\overrightarrow{e_{y'}}$, et vice-versa.

Schéma de droite : On considère une masse M attachée à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ. À l'autre extrémité, le fil est attaché au point O d'un support fixe. La masse est soumise à son poids $\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{e_y}$ et à la tension du fil $\overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{e_r}$.

3) Exprimer les composantes de $\overrightarrow{P}$ dans la base polaire et les les composantes de $\overrightarrow{T}$ dans la base cartésienne.

4) Exprimer $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ en fonction de $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, et vice-versa.

Exercice n°2 • Trajectoire spiralaire *cours*

Un point M décrit la courbe d'équation polaire suivante :

$$r = b\,e^{-t/\tau} \qquad \theta = \omega t$$

avec τ et ω des constantes positives.

1) Tracer l'allure de sa trajectoire.

2) Déterminer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération du point M.

3) En déduire les normes de ces vecteurs ainsi que l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur position.

4) Déterminer l'écart Δr entre le point M à un instant quelconque et ce même point un tour plus tard.

Exercice n°3 • Bretelle d'accès *cours*

Un conducteur, au volant de son automobile, que l'on assimilera à un point matériel, se déplace sur l'autoroute à la vitesse constante $v_0 = 100$ km·h^{-1}. Il souhaite sortir de l'autoroute (tout en gardant la même vitesse) en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50$ m. On admet que pour éviter de déraper dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule doit rester inférieur à $a_m = 10$ m·s^{-2} à tout instant.

1) La voiture dérape-t-elle dans la bretelle ?

2) Calculez la vitesse maximale v_1 à laquelle la voiture peut décrire le virage sans risque de dérapage.

Le conducteur décide désormais, dans le virage, de réduire la norme de sa vitesse linéairement dans le temps. On note $t = 0$ le temps du début du freinage.

3) Déterminer $v(t)$ et $a(t)$, l'évolution de la norme des vecteurs vitesse et accélération. Tracer ces deux courbes. Conclure.

Exercice n°4 • Conversion d'unité ★☆☆

1) Une voiture avance à la vitesse $v = 70$ km·h^{-1}. Quelle est sa vitesse en m·s^{-1} ?

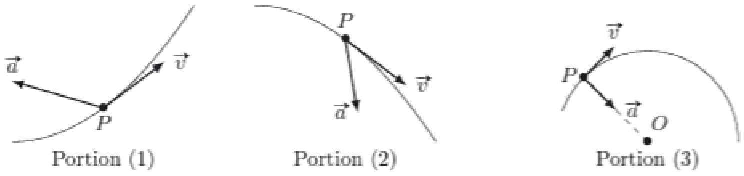
2) Un moteur tourne à la vitesse angulaire $\omega = 3600$ tours·min^{-1}. Quelle est sa vitesse angulaire en rad·s^{-1} ?

Exercice n°5 • Mouvements d'un planeur ★☆☆

Nous nous intéressons à l'évolution de la norme du vecteur vitesse d'un planeur dans trois portions de sa trajectoire représentées ci-dessous. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ du planeur, assimilé à un point P, sont indiqués à un instant donné.

1) Déterminer pour chaque portion de trajectoire si la norme de la vitesse de P augmente ou diminue.

2) La portion (3) est circulaire de rayon R et de centre O. Quel est le lien entre la norme du vecteur accélération et celle du vecteur vitesse dans ce cas ?



Exercice n°6 • Équations horaires ★★☆

On considère un mouvement décrit, dans la base cartésienne, par les équation horaires :

$$x(t) = a_0 t^2 + x_0 \qquad y(t) = v_0 t \qquad z(t) = z_0$$

avec a_0, v_0 et z_0 des constantes positives.

1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne. Déterminer également les expressions de leurs normes.

2) Tracer la trajectoire de la courbe.

3) Tracer qualitativement en quelques points de la courbe le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

Exercice n°7 • Trajectoire hélicoïdale ★★☆

Un mobile ponctuel M décrit une trajectoire d'équation horaire, dans la base cartésienne :

$$x(t) = R\cos(\omega t) \qquad y(t) = R\sin(\omega t) \qquad z(t) = \alpha t$$

Avec α et ω des constantes positives.

1) Déterminer la dimension de R, ω et α.

2) Donner les équations paramétriques cylindriques du mouvement $r(t)$, $\theta(t)$, $z(t)$.

3) Déterminer l'allure de la trajectoire.

4) Donner les expressions du vecteur vitesse dans les deux bases. Quelle est la norme de ce vecteur ?

Exercice n°8 • Trajectoire d'un avion ★★☆

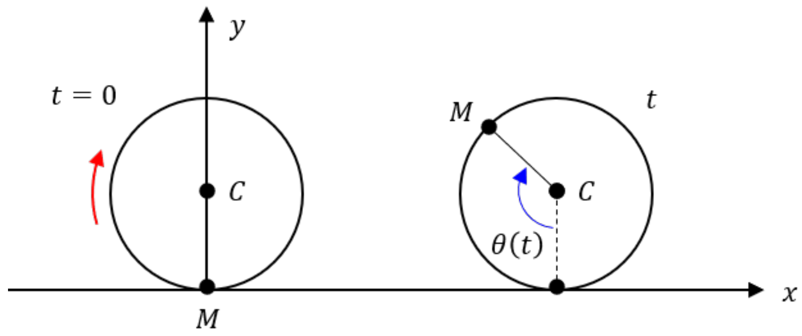
On étudie le mouvement d'un avion se déplaçant à faible altitude autour de la Terre. On peut alors considérer qu'il évolue à la surface d'une sphère de rayon R_T. Sa position y est repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques. On suppose que son vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre est de norme constante.

1) Il se déplace du nord vers le sud. Déterminer l'évolution de ses coordonnées sphériques $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.

2) Même question s'il se déplace sur un cercle de latitude constante, d'est en ouest.

Exercice n°9 • Cycloïde ★★☆

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe (Ox).



À l'instant initial, l'abscisse du point C est nulle. On note M le point sur la périphérie de la roue en contact avec le sol à l'instant initial. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$, l'angle entre $\overrightarrow{CM}(t=0)$ et $\overrightarrow{CM}(t)$.

1) Déterminer la relation entre l'abscisse du centre de la roue $x_c(t)$ et l'angle $\theta(t)$.

2) Déterminer, en fonction de R, θ et des vecteurs de base, l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3) Tracer l'allure de la trajectoire suivie par le point M.

4) Déterminer l'expression des vecteurs vitesse et accélération. Que valent ces expressions lorsque M touche le sol ?

Exercice n°10 • Cardioïde ★★☆

Un mobile ponctuel M décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$r(\theta) = \frac{a}{2}\left(1 + \cos(\theta)\right)$$

où a est une constante positive et $\theta(t) = \omega t$ avec ω une constante positive.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de a, ω et t.

2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction de a, ω et t, à la fois dans la base polaire

et dans la base cartésienne.

3) Déterminer sa norme.

4) Tracer la trajectoire.

Exercice n°11 • Conjonction de planètes ★★☆

Deux planètes assimilées à des points M_A et M_B décrivent des orbites circulaires de même centre O dans un même plan, en tournant dans le même sens. Leurs mouvements sont circulaires uniformes, de périodes respectives T_A et T_B.

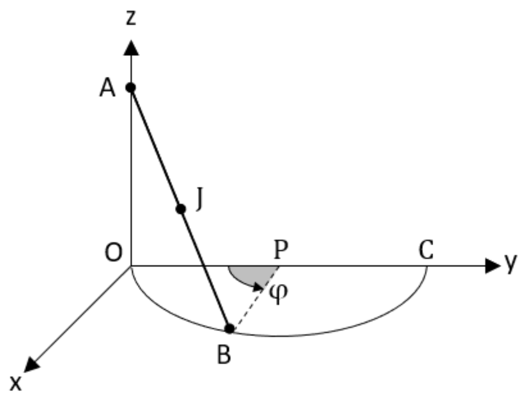
1) Déterminer la durée séparant deux conjonctions de M_A et M_B, définies par l'alignement des points O, M_A et M_B (dans cet ordre).

2) Calculer cette durée pour Vénus et la Terre, de périodes respectives $T_V = 225$ jours et $T_T = 365$ jours.

Exercice n°12 • Chute guidée d'un bâton ★★★

Une barre rectiligne AB de longueur $2b$ se déplace dans le référentiel cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ de sorte que :

- son extrémité A est guidée sur le demi-axe positif (Oz) ;
- son extrémité B est guidée par le demi-cercle du plan (Oxy) de centre $P = (0, b, 0)$ et de rayon b. On repère la position de B par l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PB}\right)$.



À l'instant initial $t = 0$, B se trouve en O. À l'instant final, B se trouve en C. Le point B se déplace avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega$ constante.

Formulaire : $1-\cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$.

Nous allons repérer le point B dans la base polaire de centre P, de vecteur radial : $\overrightarrow{e}_r = \overrightarrow{PB}/PB$ et de vecteur orthoradial $\overrightarrow{e}_\varphi$ de sorte que $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\varphi, \overrightarrow{e}_z)$ forme une base orthonormée directe.

1) Reproduire le schéma et dessiner la base polaire $(P, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\varphi)$.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{e}_r$ et $\overrightarrow{e}_\varphi$ en fonction de φ, $\overrightarrow{e}_x$ et $\overrightarrow{e}_y$.

3) Déterminer, en fonction de ω, la durée T du mouvement.

4) Déterminer l'expression des vecteurs positions $\overrightarrow{PB}$, vitesse $\overrightarrow{v}_B$ et accélération $\overrightarrow{a}_B$ de B dans la base polaire.

5) Déterminer l'expression des coordonnées cartésiennes $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du point B en fonction de ω, t et b.

6) Soit J le point au milieu de la barre. Montrer que les expressions horaires du point J dans la base cartésienne sont :

$$x_J(t) = \frac{b}{2}\sin(\omega t) \qquad y_J(t) = \frac{b}{2}\left(1-\cos(\omega t)\right) \qquad z_J(t) = b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

7) Calculer le carré de la norme de la vitesse du point J, $v_J^2(t)$, en fonction de ω, t et b.

8) Le mouvement du point J est-il accéléré, décéléré ou uniforme ?

9) Rappeler la définition de la valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ entre 0 et T, puis calculer la valeur moyenne du carré de la vitesse $\langle v_J^2(t)\rangle$ entre 0 et T, en fonction de ω et b.

Exercice n°13 • Trajectoire de poursuite ★★★

On considère deux demi-droites perpendiculaires (Ox) et (Oy). À l'instant $t = 0$, une femme part de O et parcourt l'axe (Oy) avec la vitesse constante v. Au même instant, son chien part d'un point A, situé sur l'axe (Ox) à une distance a de O, et se dirige constamment vers sa maîtresse en courant à la vitesse $2v$.

1) Déterminer l'expression d'un vecteur tangent au vecteur vitesse du chien, en fonction des coordonnées (x, y) du chien et du temps t.

2) Montrer que l'équation différentielle de la trajectoire du chien est

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

3) Vérifier que cette équation admet pour solution des fonctions de la forme :

$$y = \frac{\alpha}{3}x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{\alpha} + \beta$$

où α et β sont des constantes qu'on déterminera.

4) À quel instant le chien rejoint-il son maître ?

5) Déterminer la longueur de la trajectoire parcourue par le chien.

Éléments de correction

❶ 1) et 2) $\vec{e}_x = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{x'} + \sin(\alpha)\,\vec{e}_{y'}$; $\vec{e}_y = \cos(\alpha)\,\vec{e}_{y'} - \sin(\alpha)\,\vec{e}_{x'}$; $\vec{e}_{x'} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_x - \sin(\alpha)\,\vec{e}_y$ et $\vec{e}_{y'} = \cos(\alpha)\,\vec{e}_y + \sin(\alpha)\,\vec{e}_x$. 3) et 4) $\vec{e}_x = \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\,\vec{e}_r$; $\vec{e}_y = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$; $\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_y + \sin(\theta)\,\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y$. ❷ 1) Spirale sens trigo. 2) $v_r(t) = -\frac{b}{\tau}\,e^{-t/\tau}$, $v_\theta(t) = b\omega\,e^{-t/\tau}$, $a_r(t) = b\,\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)e^{-t/\tau}$ et $a_\theta(t) = -\frac{2b\omega}{\tau}\,e^{-t/\tau}$. 3) $v(t) = b\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}\,e^{-t/\tau}$, $a(t) = b\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)\,e^{-t/\tau}$ et $\cos(\alpha(t)) = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$. 4) $\Delta r(t) = b\left(1 - e^{-2\pi/\omega\tau}\right)e^{-t/\tau}$. ❸ 1) Oui. 2) $v_1 = 80,5$ km·h^{-1}. 3) $v(t) = v_1 - \alpha t$ et $a(t) = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{v^2(t)}{R}\right)^2}$ ❹ 1) $v = 19,4$ m·s^{-1}. 2) $\omega = 377$ rad·s^{-1}. ❺ 1) Diminue, augmente, constante. 2) $a = \frac{v^2}{R}$. ❻ 1) $\dot{x} = 2a_0 t$, $\dot{y} = v_0$, $\dot{z} = 0$, $v = \sqrt{(2a_0 t)^2 + v_0^2}$, $\ddot{x} = 2a_0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = 0$ et $a = 2a_0$. 2) $x(y) = \frac{a_0}{v_0^2}y^2 + x_0$. ❼ 1) $[R]$ = Longueur, $[\omega]$ = Temps^{-1} et $[\alpha]$ = Vitesse. 2) $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$ et $z(t) = \alpha t$. 3) Une hélice. 4) $\vec{v} = R\omega\,(\cos(\omega t)\ \vec{u}_y - \sin(\omega t)\ \vec{u}_x) + \alpha\,\vec{u}_z = R\omega\,\vec{u}_\theta + \alpha\,\vec{u}_z$ et $v = \sqrt{(R\omega)^2 + \alpha^2}$. ❽ 1) $\theta(t) = \frac{v}{R_T}t$. 2) $\varphi(t) = -\frac{v}{R_T\sin(\theta)}t$. ❾ 1) $x_c = R\theta$. 2) $\overrightarrow{OM} = R\left[(\theta - \sin(\theta))\,\vec{u}_x + (1-\cos(\theta))\,\vec{u}_y\right]$. 4) $\vec{v} = R\dot{\theta}\left[(1-\cos(\theta))\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\ \vec{u}_y\right]$, $\vec{a} = R\left(\ddot{\theta}\,(1-\cos(\theta)) + \dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)\vec{u}_x + R\left(\ddot{\theta}\sin(\theta) + \dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\vec{u}_y$, $\vec{v}_{sol} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{sol} = \frac{v_c^2}{R}\,\vec{u}_y$. ❿ 1) $x(t) = \frac{a}{2}\,(1+\cos(\omega t))\cos(\omega t)$ et $y(t) = \frac{a}{2}\,(1+\cos(\omega t))\sin(\omega t)$. 2) $v_r = -\frac{a\omega}{2}\sin(\omega t)$, $v_\theta = \frac{a\omega}{2}\,[1+\cos(\omega t)]$, $v_x = -\frac{a\omega}{2}\,[1+2\cos(\omega t)]\sin(\omega t)$ et $v_y = \frac{a\omega}{2}\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) + \cos(\omega t)\right]$. 3) $v = a\omega\sqrt{\frac{1+\cos(\omega t)}{2}}$. ⓫ 1) $T_{conj} = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right)^{-1}$. 2) $T_{conj} = 587$ jours. ⓬ 2) $\vec{e}_r = -\cos(\varphi)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi)\,\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\varphi = \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y$. 3) $T = \frac{\pi}{\omega}$. 4) $\overrightarrow{PB} = b\,\vec{e}_r$, $\vec{v}_B = b\omega\,\vec{e}_\varphi$ et $\vec{a}_B = -b\omega^2\,\vec{e}_r$. 5) $x_B(t) = b\sin(\omega t)$ et $y_B(t) = b\,(1-\cos(\omega t))$. 6) $x_J(t) = \frac{b}{2}\sin(\omega t)$, $y_J(t) = \frac{b}{2}\,(1-\cos(\omega t))$ et $z_J(t) = b\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$. 7) $v_J^2(t) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2\left(1+\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$. 8) Accéléré. 9) $\langle v_J^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_J^2(t)\ dt = \frac{3}{2}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2$. ⓭ 1) $\overrightarrow{CM} = -x\,\vec{u}_x + (vt - y)\,\vec{u}_y$. 2) cf. correction. 3) $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta = \frac{2a}{3}$. 4) $T = \frac{2a}{3v}$. 5) $D = \frac{4}{3a}$.